# Β.ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

**ΗΜ/ΝΙΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΤΑΞΗ:Γ΄ΓΕΛ**

**ΒΑΘΜΟΣ:**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.Δείξτε ότι** $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$ **για** $x \neq 0$ **(μον. 5)**

**Α2.Διατυπώστε το κριτήριο παρεμβολής** **(μον. 5**

**Α3.Χαρακτηρίστε Σ ή Λ τις επόμενες σχέσεις ή προτάσεις:**

**i.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\eta\mu x}{x^{2022}} = -\infty$

**iiΑν** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ **και** $f(x) > 0$ **κοντά στο** $x_0$ **τότε** $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

**iii.Αν** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -1$ **και** $g(x) < 0$ **κοντά στο** $x_0$ **τότε ισχύει** $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

**iv.Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$**

**v.Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$** **(μον. $5\times 2$)**

**Α4.Θεωρούμε τον ισχυρισμό: Αν μία συνάρτηση f λαμβάνει αρνητικές τιμές κοντά στο $x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$**

**Να χαρακτηριστεί Σ ή Λ ο ισχυρισμός και να δικαιολογηθεί αυτός ο χαρακτηρισμός**

**(μον. $2+3$)**

## ΘΕΜΑ Β

**Για μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=2$**

**Β1.Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $M(1,f(1))$**

**Β2.Αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφη συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο που η $C_{f^{-1}}$ τέμνει τον κατακόρυφο άξονα**

**Β3.Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}[x\cdot f(\dfrac{x+1}{x})]$**

**Β4.Βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει**

**$f(x)\le \alpha\cdot \eta\mu(x-1)+x^2+x-2$**

**Β5.Δίνεται η συνάρτηση με τύπο** $$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-1} & \text{αν } x<1\\[2mm] \dfrac{x^2+bx+\gamma}{x^2-1} & \text{αν } x>1\end{cases}$$

**Βρείτε τους αριθμούς $b,\gamma\in\mathbb{R}$ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$** **(μον. $5\times 5$)**

## ΘΕΜΑ Γ

**Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0)=3$, $f(x)\neq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και**

$$f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

**Γ1.Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης**

**Γ2.Αν $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$ δείξτε ότι η συνάρτηση g για την οποία ισχύει $g(x)=f^2(x)-2xf(x)\ ,x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή**

**Γ3.Λύστε την εξίσωση $f^4(x)+4x^2f^2(x)=x^4+4xf^3(x)$**

**Γ4.Δείξτε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και λύστε την εξίσωση**

$$e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x}$$

**Γ5.Δείξτε ότι ισχύει $2f(x)<f(x+1)+f(x-1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$** **(μον. $5\times5$)**

## ΘΕΜΑ Δ

**Θεωρούμε συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x+(x-2)\ln x$**

**Δ1.Δείξτε ότι $f(x)\geq 1$ για κάθε $x>0$**

**Δ2.Βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=3$ έχει δύο ακριβώς λύσεις**

**Δ3.Αν $\rho_1<\rho_2$ οι δύο ρίζες της παραπάνω εξίσωσης δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-3}{\xi}$**

**Δ4.Δείξτε ότι η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ διέρχεται από το σημείο $H(0,3)$**

**Δ5.Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(1)=1$**

**ισχύει $f(x)+g(x)\geq 2x$ για κάθε $x>0$ βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_g$ στο σημείο $N(1,g(1))$** **(μον. $5\times 5$)**