ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Κυρίτσης
φροντιστήριο με όραμα και στόχο
Κύπριων Ηρώων 42Β, Ηλιούπολη - τηλ. 210 9955524
e-mail: info@kyritsis-education.gr
kyritsis-education.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 135

Α2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 51

Α3. ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 23

Α4. $\alpha \to \Sigma$, $\beta \to \Lambda$, $\gamma \to \Sigma$, $\delta \to \Sigma$, $\varepsilon \to \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$

Β1 Θέτω $u=x+1 \Rightarrow x=u-1$

Τότε: $f(u)=u\cdot e^{-(u-1)} \Leftrightarrow f(u)=u\cdot e^{1-u}$, $u\in\mathbb{R}$

Άρα $f(x)=x\cdot e^{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β2 Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, με:

$f'(x)=e^{1-x}+x\cdot e^{1-x}\cdot(-1)=e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}=(1-x)\cdot e^{1-x}$

Λύνω $f'(x)=0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

$f'(x)>0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

ολΜ

f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$

f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$, το $f(1)=1$

B3 Η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = -e^{1-x} + (1-x)\cdot e^{1-x}\cdot(-1) = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x}$$
$$= -e^{1-x}\cdot(1+1-x)$$
$$= e^{1-x}\cdot(x-2)$$

Λύνω $f''(x)=0 \overset{e^{1-x}>0}{\iff} x-2=0 \iff x=2$

$f''(x)>0 \overset{e^{1-x}>0}{\iff} x-2>0 \iff x>2$

Άρα

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$

Η f $\frown$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,2]$

Η f $\smile$ στρέφει τα κοίλα άνω στο $[2,+\infty)$

Η f έχει σημείο καμπής στο 2, το $f(2)=\frac{2}{e}$

<u>Ασύμπτωτες</u>:

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα ΔΕΝ έχει κατακόρυφες.

Ψάχνω για πλάγια στο $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\cdot e^{1-x}}{\cancel{x}} = +\infty$ Άρα ΔΕΝ έχει πλάγια στο $-\infty$ ούτε οριζόντια

Ψάχνω για πλάγια στο $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\cdot e^{1-x}}{\cancel{x}} = 0 \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-0\cdot x] = \lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x} \overset{(+\infty)\cdot 0}{=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=\!=}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}} = 0$ Άρα η $\varepsilon: y=0$ $(x'x)$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και ΔΕΝ έχει πλάγια στο $+\infty$

B4 i) ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Η $f \nearrow$ στο $(-\infty, 1]$

Άρα $f\left((-\infty,1]\right) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$

διότι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x \cdot e^{1-x}\right) \overset{-\infty\cdot(+\infty)}{=\!=} -\infty$

και $\lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$

Η $f \searrow$ στο $(1, +\infty)$

Άρα $f\left((1,+\infty)\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x)\right) = (0, 1)$

Άρα το σύνολο τιμών είναι $f(A) = (-\infty, 1]$

ii) Πλήθος ριζών της $f(x) = \lambda$

Διακρίνω τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda < 0$, υπάρχει $\rho_1 \in (-\infty, 1]$ ώστε $f(\rho_1) = \lambda$ και επειδή $f \nearrow$, είναι μοναδική
- Αν $\lambda = 0$, υπάρχει $\rho_2 \in (-\infty, 1]$ ώστε $f(\rho_2) = \lambda$ και επειδή $f \nearrow$, είναι μοναδική
- Αν $\lambda \in (0, 1)$, υπάρχουν $\rho_3 \in (-\infty, 1]$ και $\rho_4 \in (1, +\infty)$ ώστε $f(\rho_3) = f(\rho_4) = \lambda$ και επειδή $f \nearrow$ στο $(-\infty, 1]$ και $f \searrow$ στο $(1, +\infty)$ είναι μοναδικές
- Αν $\lambda = 1$, υπάρχει μοναδικό $\rho_5 = 1$ ώστε $f(\rho_5) = 1$
- Αν $\lambda > 1$, Δεν έχει καμία ρίζα.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x^3-3x^2-x+1 & , \quad x\le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x & , \quad 0<x\le \frac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad \alpha<-3$$

Γ1 Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική.

Η f είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\alpha x^3-3x^2-x+1\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\sigma\upsilon\nu x)=\sigma\upsilon\nu 0=1$$

$f(0)=1$

Άρα $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$. Άρα f είναι συνεχής στο 0.

Εξετάζω την παραγωγισιμότητα στο $x_0=0$:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(\alpha x^2-3x-1)}{\cancel{x}}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

Άρα $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Γ2 i) Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

$f(0)=1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = συν\frac{3\pi}{2} = 0$ Άρα $f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Άρα Δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Rolle.

ii) $f'(x) = -ημx$ για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

Λύνω $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -ημx = 0 \Leftrightarrow ημx = ημ\pi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \pi \\ x = 2\kappa\pi \end{cases} \underset{\kappa \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} x = \lambda \cdot \pi \ , \ \lambda \in \mathbb{Z}$$

$$0 < x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \lambda \cdot \pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \lambda < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Άρα η λύση $\xi = \pi$ είναι <u>μοναδική</u>

Γ3 Για $x < 0$, $f(x) = \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1$

$f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$.

Έστω ότι υπάρχει $x_0 < 0$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον $x'x$:

Τότε: $f'(x_0) = 3\alpha x_0^2 - 6x_0 - 1 = 0$

$$\Delta = 36 + 12\alpha = 12(\alpha+3) < 0$$

Άρα η $f'(x_0) = 0$ είναι αδύνατη. Άτοπο

Άρα Δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον $x'x$

Γ4) Για $x \in (0, \frac{3\pi}{2}]$ έχω $f(x) = \sigma\upsilon\nu x \geq -1$. Ισχύει.

Για $x \in (-\infty, 0]$ έχω

$f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1 < 0$ διότι $\Delta < 0$ και $3\alpha < 0$

Άρα $f\downarrow$ γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Άρα $x \leq 0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(0) = 1 > -1$.

Άρα για κάθε $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$

ισχύει $\boxed{f(x) \geq -1}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 $\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \cdot \ln x = 1 \Leftrightarrow x \cdot \ln x - 1 = 0$

Θεωρώ $k(x) = x \cdot \ln x - 1$, $x \in (0, +\infty)$

Η k είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξεις συνεχών.

$k(1) = 1 \cdot \ln 1 - 1 = -1 < 0$

$k(e) = e \cdot \ln e - 1 = e - 1 > 0$

Άρα $k(1) \cdot k(e) < 0$

Σύμφωνα με Θεώρημα Bolzano, υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ ώστε $k(x_0) = 0$

Η k είναι παραγωγίσιμη στο $(1, e)$

με $k'(x) = \ln x + 1 > 0$

$$\left(1 < x < e \overset{\ln \uparrow}{\Leftrightarrow} \ln 1 < \ln x < \ln e \Leftrightarrow 0 < \ln x < 1 \Leftrightarrow 1 < \ln x + 1 < 2 \right)$$

Άρα η k είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα $x_0 \in (1, e)$ είναι μοναδική.

Δ2 $f(x) = (\ln x_0)\cdot(x+1) - \ln x - 1.$ $\quad f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{x\cdot\ln x_0 - 1}{x}, \quad x>0$$

Λύνω $f'(x)=0 \Leftrightarrow x\cdot\ln x_0 - 1 = 0 \overset{x_0\neq 1}{\Leftrightarrow} x = \dfrac{1}{\ln x_0} \overset{\ln x_0 = \frac{1}{x_0}}{\Longleftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} \Leftrightarrow \boxed{x = x_0}$$

Λύνω $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\cdot\ln x_0 - 1 > 0 \Leftrightarrow x\cdot\ln x_0 > 1 \overset{x_0\in(1,e)}{\Leftrightarrow} x > \dfrac{1}{\ln x_0} = x_0$

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$	

Η f παρουσιάζει στο x_0, ολικό ελάχιστο το $f(x_0)$

με $f(x_0) = \ln x_0\cdot(x_0+1) - \ln x_0 - 1 =$

$$= x_0\cdot\ln x_0 + \cancel{\ln x_0} - \cancel{\ln x_0} - 1 \overset{\ln x_0 = \frac{1}{x_0}}{=\!=}$$

$$= \cancel{x_0}\cdot\frac{1}{\cancel{x_0}} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Άρα $f(x_0)=0$ είναι το <u>ολικό ελάχιστο</u>

Δ3 $g(x) = x \cdot e^{-x}$, $h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$

Η g είναι παραγωγίσιμη με:

$$g'(x) = e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x} \cdot (1-x)$$

Η $h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$ είναι παραγωγίσιμη με:

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \cdot (x+1)' = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot (\ln x_0 - \ln e)$$

$$= \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot (\ln x_0 - 1)$$

Έστω ότι οι C_g και C_h έχουν σε κοινό σημείο τους x_1 κοινή εφαπτομένη.

Τότε πρέπει: $g(x_1) = h(x_1)$ και $g'(x_1) = h'(x_1)$

$\boxed{g(x_1) = h(x_1)} \Leftrightarrow x_1 \cdot e^{-x_1} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_1+1}$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot e^{-x_1} = \frac{(x_0)^{x_1+1}}{e^{x_1+1}}$$

$$\Leftrightarrow e^{x_1} \cdot e \cdot x_1 \cdot e^{-x_1} = (x_0)^{x_1} \cdot x_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e \cdot x_1}{x_0} = (x_0)^{x_1}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{(x_0)^{x_1+1}}{e} \quad (\text{άρα } x_1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow e \cdot x_1 = (x_0)^{x_1+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln e + \ln x_1 = (x_1+1) \cdot \ln x_0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \ln x_1 = (x_1+1) \cdot \ln x_0$$

$$\Leftrightarrow (x_1+1) \cdot \ln x_0 - \ln x_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=0 \\ f(x_0)=0 \end{array}\right\} f(x_1)=f(x_0) \Leftrightarrow \boxed{x_1=x_0}$$

διότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)=0$

Άρα x_0 μοναδικό

Αρκεί να δείξω επιπλέον ότι $g'(x_0)=h'(x_0)$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0}\cdot(1-x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot(\ln x_0-1) \xLeftrightarrow{\ln x_0=\frac{1}{x_0}}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0}\cdot(1-x_0)=\frac{(x_0)^{x_0+1}}{e^{x_0}\cdot e}\cdot\left(\frac{1}{x_0}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0}\cdot e^{x_0}(1-x_0)\cdot e=x_0^{x_0}\cdot\cancel{x_0}\cdot\frac{(1-x_0)}{\cancel{x_0}} \xLeftrightarrow{x_0\neq 1}$$

$$\Leftrightarrow 1\cdot e\cdot\cancel{(1-x_0)}=x_0^{x_0}\cdot\cancel{(1-x_0)}$$

$$\Leftrightarrow e=x_0^{x_0}$$

$$\Leftrightarrow \ln e=\ln x_0^{x_0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1=x_0\cdot\ln x_0$$

$$\Leftrightarrow 1=\cancel{x_0}\cdot\frac{1}{\cancel{x_0}}$$

$$\Leftrightarrow 1=1$$ ισχύει

Άρα στο x_0 έχει <u>κοινή εφαπτομένη</u>

(11)

(Δ4) $d(x)=\sqrt{(x-x)^2+(\varphi(x)-f(x))^2}=|\varphi(x)-f(x)|=f(x)-\varphi(x)$ (αφού $f(x)>\varphi(x)$)

Η $d(x)$ έχει ελάχιστο στο x_0, άρα $d(x)\geq d(x_0)$

- Αν $\varphi(x)$ παραγωγίσιμη στο x_0, τότε:

  Επειδή η $d(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0
  και επειδή $d(x_0)$ είναι ακρότατο, από Θ. Fermat
  θα έχω $d'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)-\varphi'(x_0)=0 \Leftrightarrow \varphi'(x_0)=f'(x_0)$
  $\Leftrightarrow \varphi'(x_0)=0$

  Άρα κρίσιμο σημείο της φ είναι το x_0

- Αν $\varphi(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0
  τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ