Κυρίτσης
φροντιστήριο με όραμα και στόχο
Κύπριων Ηρώων 42Β, Ηλιούπολη - τηλ. 210 9955524
e-mail: info@kyritsis-education.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 2020

ΘΕΜΑ Α

Α1 Σελ 76 Σχολικό Βιβλίο

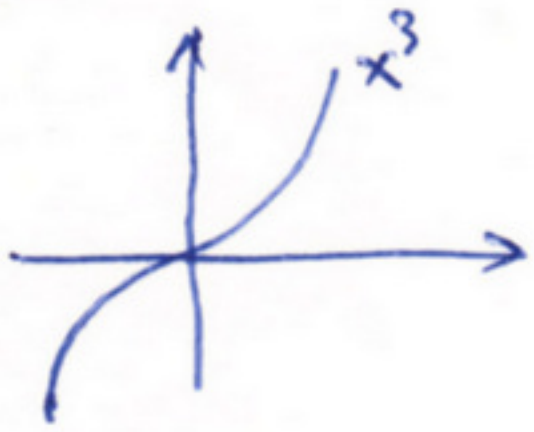
Α2 Σελ 104 Σχολικό Βιβλίο

Α3 α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όμως

ισχύει ότι $f'(x)=3x^2 \geq 0$



Α4 α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

Κυρίτσης
φροντιστήριο με όραμα και στόχο
Κύπριων Ηρώων 42Β, Ηλιούπολη - τηλ. 210 9955524
e-mail: info@kyritsis-education.gr

ΘΕΜΑ Β

$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g(x)=e^x$

Β1 Πεδίο ορισμού $f\circ g$: $A_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in A_g \text{ και } g(x)\in A_f\}=(0,+\infty)$

$x\in A_g \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

$g(x)\in A_f \Leftrightarrow e^x>1 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x>0$

και $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$.

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με: $f(g(x_1))=f(g(x_2))\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\dfrac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}\Leftrightarrow (e^{x_1}+2)(e^{x_2}-1)=(e^{x_2}+2)(e^{x_1}-1)$

$\Leftrightarrow \cancel{e^{x_1+x_2}}-e^{x_1}+2e^{x_2}-\cancel{2}=\cancel{e^{x_1+x_2}}-e^{x_2}+2e^{x_1}-\cancel{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3e^{x_1}=-3e^{x_2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2} \overset{\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} \boxed{x_1=x_2}$ Άρα $f\circ g$ είναι 1-1 και αντιστρέφεται

Έστω $f(g(x))=y \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{e^x+2}{e^x-1}=y\Leftrightarrow e^x+2=(e^x-1)\cdot y\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x+2=e^x\cdot y-y\Leftrightarrow e^x-e^x\cdot y=-y-2\Leftrightarrow e^x(1-y)=-y-2. \overset{1-y\neq 0}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow e^x=\dfrac{-y-2}{1-y}\Leftrightarrow e^x=\dfrac{y+2}{y-1}$

Πρέπει $\frac{y+2}{y-1}>0$. Τότε $(y+2)\cdot(y-1)>0$

$y\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

y	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$y-1$	$-$		$-$ 0	$+$
$y+2$	$-$	0	$+$	$+$
Γιν	$+$		$-$	$+$

Τότε $e^x=\frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$. Όμως $x>0$, άρα πρέπει:

$$\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)>0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)>\ln 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1}>1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1}-1>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{y}+2-\cancel{y}+1}{y-1}>0 \Leftrightarrow y-1>0 \Leftrightarrow \boxed{y>1}$$

Άρα $f^{-1}(y)=\ln\frac{y+2}{y-1}$, $y>1$. Άρα $(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, $x>1$

B3 $\varphi(x)=(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\frac{x+2}{x-1}$, $x>1$

Η φ είναι παραγωγίσιμη με:

$$\varphi'(x)=\left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)'=\frac{x-1}{x+2}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{\cancel{x-1}}{x+2}\cdot\frac{x-1-x-2}{(x-1)^{2}}=\frac{-3}{(x+2)(x-1)}<0 \text{ για } (1,+\infty)$$

(Εφόσον $x+2>0$ και $x-1>0$)

Άρα η φ είναι $\downarrow$ γν. φθίνουσα στο $(1,+\infty)$

Κυρίτσης
φροντιστήριο με όραμα και στόχο
Κύπριων Ηρώων 42Β, Ηλιούπολη - τηλ. 210 9955524
e-mail: info@kyritsis-education.gr

(Β4) $\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right) \xrightarrow[\substack{\text{όταν } x\to 1^+ \\ u\to+\infty}]{u=\frac{x+2}{x-1}} \lim_{u\to+\infty}(\ln u) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right) \xrightarrow[\substack{\text{όταν } x\to +\infty \\ u\to 1}]{u=\frac{x+2}{x-1}} \lim_{u\to 1}(\ln u) = \ln 1 = 0$

(επειδή: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$)

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Γ}}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln\lambda, & x\le 0 \\ \etaμx + \lambda\cdot συνx, & 0<x<\frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad \lambda>0$$

(Γ1) <u>Ν.δο $\lambda=1$</u>

Η f είναι συνεχής στο 0, οπότε πρέπει: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = 1 - \ln\lambda$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\etaμx + \lambda\cdot συνx) = 0 + \lambda\cdot συν0 = \lambda$

$f(0) = 1 - \ln\lambda$

Άρα πρέπει $1 - \ln\lambda = \lambda \Leftrightarrow \lambda + \ln\lambda - 1 = 0$

Θεωρώ $\varphi(\lambda) = \lambda + \ln\lambda - 1$, $\lambda>0$

Παρατηρώ ότι $\varphi(1) = 0$, και $\varphi'(\lambda) = 1 + \frac{1}{\lambda} > 0$ για $\lambda>0$. Άρα $\boxed{\lambda=1}$ μοναδική ρίζα

Γ2 Για $\lambda=1$, η f γίνεται: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x\le 0 \\ \etaμx+συνx, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

Εξετάζω την παραγωγισιμότητα της f στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+x}{(1-x)\cdot x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}}{(1-x)\cdot\cancel{x}}=1.$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ημx+συνx-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ημx}{x}+\frac{συνx-1}{x}\right)=1+0=1$$

Άρα $f'(0)=1 \Leftrightarrow εφω=1 \Leftrightarrow \boxed{ω=\frac{\pi}{4}}$

Άρα η εφαπτομένη της C_f στο $A(0,1)$ σχηματίζει με $x'x$ γωνία $ω=\frac{\pi}{4}$

Γ3 κρίσιμα σημεία.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $f'(x)=-\frac{1}{(1-x)^2}\cdot(-1)=\frac{1}{(1-x)^2}>0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=συνx-ημx$

Συνεπώς, κρίσιμα σημεία αναζητούμε στις λύσεις της $f'(x)=0$ στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow συνx=ημx \Leftrightarrow συνx=συν\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2κ\pi+\frac{\pi}{2}-x \Leftrightarrow 2x=2κ\pi+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=κ\pi+\frac{\pi}{4}}$

ή $\cancel{x}=2κ\pi-\frac{\pi}{2}+\cancel{x}$ Αδύνατη

Κυρίτσης
φροντιστήριο με όραμα και στόχο
Κύπριων Ηρώων 42Β, Ηλιούπολη - τηλ. 210 9955524
e-mail: info@kyritsis-education.gr

Πρέπει $0<x<\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0<k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}<k\pi<\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{\cancel{\pi}}{4}<k\cdot\cancel{\pi}<\frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k<\frac{5}{4} \xLeftrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=0,\ k=1$

Άρα $k=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}}$

$k=1 \Rightarrow x=\pi+\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{5\pi}{4}}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{4}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{5\pi}{4}+\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4}=\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\eta\mu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

Άρα $A\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$, $B\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$

Γ4 Έστω $M\left(\alpha,\frac{1}{1-\alpha}\right)$ και $\alpha'(t)=-\frac{\alpha(t)}{3}$

Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι: $y-f(\alpha)=f'(\alpha)\cdot(x-\alpha)$

$\Leftrightarrow y-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}\cdot(x-\alpha)$

Σημείο τομής με $x'x$: Θέλω $y=0 \Longrightarrow -\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-(1-\alpha)^{\cancel{2}}}{\cancel{1-\alpha}}=x-\alpha \Leftrightarrow -1+\alpha=x-\alpha \Leftrightarrow \boxed{x=2\alpha-1}$

Άρα $B(2\alpha-1,\ 0)$

Την χρ. στιγμή t_0, ισχύει: $\alpha(t_0) = -1$ και $\alpha'(t_0) = -\dfrac{\alpha(t_0)}{3}$

Άρα $\boxed{\alpha'(t_0) = \dfrac{1}{3}}$

Η τεταγμένη του Β είναι:

$\beta(t) = 2\alpha(t) - 1$, άρα: $\beta'(t) = 2\alpha'(t)$

Για $t = t_0$: $\beta'(t_0) = 2\alpha'(t_0) = 2 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

ΘΕΜΑ Δ

$f(x) = e^x + x^2 - e\cdot x - 1$

Δ1 $f'(x) = e^x + 2x - e \quad , x \in \mathbb{R}$

Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών.

$f'(0) = e^0 + 0 - e = 1 - e < 0$
$f'(1) = \cancel{e} + 2 - \cancel{e} = 2 > 0$
$\Big\}\ f'(0)\cdot f'(1) < 0$

Σύμφωνα με Θ. Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (0,1)$: $f'(x_0) = 0$

Επίσης, $f''(x) = e^x + 2 > 0$, άρα $f' \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$: $f'(x_0) = 0$

x	0		x_0		1
$f''(x)$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$\nearrow -$	0	$\nearrow +$	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$	

Για $x < x_0 \overset{f'\uparrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$, άρα $f \downarrow$ στο $[0, x_0]$

Για $x > x_0 \overset{f'\uparrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0$, άρα $f \uparrow$ στο $[x_0, 1]$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0)$

$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e\cdot x_0 - 1 =$

$= e^{x_0} + x_0^2 - e x_0 - 2x_0 + 2x_0 - 1$

$= e^{x_0} + x_0^2 - (e+2)x_0 + 2x_0 - 1 \underset{=}{\overset{e^{x_0} = e - 2x_0}{}} e - \cancel{2x_0} + x_0^2 - (e+2)x_0 + \cancel{2x_0} - 1$

$= x_0^2 - (e+2)\cdot x_0 + e - 1$

(Όμως: $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0$
$\Leftrightarrow \boxed{e^{x_0} = e - 2x_0}$)

Κυρίτσης
φροντιστήριο με όραμα και στόχο
Κύπριων Ηρώων 42Β, Ηλιούπολη - τηλ. 210 9955524
e-mail: info@kyritsis-education.gr

Δ2 Ισχύει ότι: $\eta\mu\frac{1}{x-x_0} \geq -1$

Άρα $\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\frac{1}{x-x_0} \geq \frac{1}{f(x)-f(x_0)} - 1$

Έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)} - 1\right) \overset{f(x)\geq f(x_0)}{=\!=\!=} +\infty$ $\Longrightarrow$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\frac{1}{x-x_0}\right) = +\infty$

Δ3 Θεωρώ $g(x) = f(x) + x - x_0$, $x \in [x_0, 1]$

Η g είναι συνεχής στο $[x_0,1]$ ως πράξεις συνεχών

$g(x_0) = f(x_0) + \cancel{x_0} - \cancel{x_0} = f(x_0) < 0$

(διότι: $f(1)=0$, $x\in(x_0,1)$ με $f\uparrow$ στο $[x_0,1]$
Άρα $x_0 < x < 1 \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} f(x_0) < f(1) = 0$)

$g(1) = \cancel{f(1)} + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$ (εφόσον $x\in(x_0,1)$)

Άρα $g(x_0)\cdot g(1) < 0$. Σύμφωνα με Θ. Bolzano, υπάρχει $\rho\in(x_0,1)$

$g(\rho) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(\rho) + \rho = x_0}$

και επειδή $g'(x) = f'(x) + 1 > 0$ στο $[x_0, 1]$. Άρα ρ, μοναδική ρίζα.

(Δ4) Η f είναι συνεχής στο $[x_0,\rho] \subset [x_0,1]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,ρ)

Από Θ.Μ.Τ, υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi \in (x_0,\rho)$ ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}=\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}$$

Ισχύει ότι $\xi \in (x_0,\rho)$ και $k \in (\rho,1)$.

Άρα $\xi < k \overset{f' \uparrow \text{ στο } [x_0,1]}{\Longleftrightarrow} f'(\xi) < f'(k) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho} < f'(k) \overset{x_0-\rho<0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f(x_0)-f(\rho) > f'(k)\cdot(x_0-\rho) \overset{(Δ3) \Rightarrow f(\rho)+\rho=x_0 \Leftrightarrow \boxed{x_0-\rho=f(\rho)}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f(x_0)-f(\rho) > f'(k)\cdot f(\rho)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) > f'(k)\cdot f(\rho)+f(\rho)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) > \left(f'(k)+1\right)\cdot f(\rho)$$