

Μαθηματικά προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου

Ύλη : Κεφάλαιο 1^ο

19-10-2019

Όνομα :.....

Θέμα Α

A1) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano. [μονάδες 4]

A2) Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$?
[μονάδες 4]

A3) να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$. [μονάδες 7]

A4) να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (σωστό) ή Λ(λάθος)

1. η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντοτε διάστημα

2. αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = 0$

3. αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

4. αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

5. αν $a > 1$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

[μονάδες 10]

Θέμα Β

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

B1) i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 8} - 4x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1} + 3^x}{3^{x+1} + 2^x}$ iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 5x + 2}{2x^2 + 6x - 8}$ [μονάδες 12]

B2) να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - ax + \beta) = 4$. [μονάδες 13]

Θέμα Γ

Γ1) Η συνάρτηση $f: [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(a) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο, ώστε : $\frac{f(x_0)}{x_0 - a} = \frac{f(a) + f(\beta)}{\beta - a}$.

[μονάδες 6]

Γ2) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$.

- i) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(0)x^4 + 2x - \eta\mu x}{f(1)x^3 - 5x + 2}$
- ii) αν $a \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x-1} + \frac{f(x)}{x-3} = a$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 3)$.
- [μονάδες 4+7]

Γ3) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - \sqrt{x^2 + 3}}{x+1} = \frac{3}{2}$.

Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-1, 2)$.

[μονάδες 8]

Θέμα Δ

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \mu e^{x-1}, & x \leq 1 \\ \xi 1 + \ln x, & x > 1 \end{cases}$.
- Δ1) να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια. [μονάδες 5]
- Δ2) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. [μονάδες 8]
- Δ3) να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} . [μονάδες 7]
- Δ4) να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια. [μονάδες 5]

Καλή επιτυχία !